TD13

CHAÎNES DE MARKOV.

Exercice 1

On étudie dans cet exercice une situation probabiliste décrite dans la question **4.**. Les deux premières questions ont pour but d'étudier les puissances de la matrice carrée d'ordre 10 définie par

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

où a et $b (b \neq 0)$ désignent des nombres réels.

1. **Recherche des matrices telles que** $M(a,b)^2 = M(a,b)$
   - **a.** Exprimer $M(a,b)^2$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_{10} où I_{10} désigne la matrice identité d'ordre 10.
   - **b.** Déterminer les couples (a,b) avec $b \neq 0$ tels que $M(a,b)^2 = M(a,b)$.
2. **Calcul des puissances de** $M(a,b)$**.** On considère les matrices $P = M\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ et $Q = I_{10} - P$.
   - **a.** Calculer P^2, Q^2, PQ et QP. En déduire les puissances de P^k et Q^k pour $k \geqslant 1$.
   - **b.** Exprimer $M(a,b)$ comme combinaison linéaire de P et de Q et en déduire $M(a,b)^n$ comme une combinaison linéaire des matrices P et Q. Expliciter enfin la matrice $M(a,b)^n$.
3. **Limite des puissances de** $M(1-9b, b)$ **pour** $0 \leqslant b \leqslant \frac{1}{9}$**.** On suppose que a et b dont des nombres réels positifs tels que $a + 9b = 1$ (donc $a = 1 - 9b$). On dit que la suite des matrices $M(a,b)^n$ converge vers une matrice L lorsque tous les coefficients de $M(a,b)^n$ convergent vers les coefficients respectifs de L quand n tend vers $+\infty$.
   - **a.** Déterminer la matrice limite L de la suite $M(a,b)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   - **b.** Exprimer la matrice L comme combinaison linéaire des matrices P et Q.
4. **Étude des déplacements des pions sur un damier.** On considère un damier à 10 cases numérotées 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. On considère les déplacements d'un pion situé à l'instant 0 sur la case 0 et à l'instant n sur une case dont le numéro est une variable aléatoire X_n.

   On fait enfin les hypothèses suivantes, concernant les déplacements du pion : si à l'instant n le pion est sur la case k $(0 \leqslant k \leqslant 9)$, il se trouve encore sur la case k à l'instant $n+1$ avec la probabilité $1/2$ et sinon, il se trouve de façon équiprobable sur toutes les autres cases.
   - **a.** Pour tout entier j compris entre 0 et 9, exprimer la probabilité $P(X_{n+1} = j)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \cdots, P(X_n = 9)$.

     On note V_n le vecteur-colonne dont les composantes sont, de haut en bas, les probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \cdots, P(X_n = 9)$.

     Déterminer une matrice carrée d'ordre 10 telle que $V_{n+1} = MV_n$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

b. Calculer en fonction de n les probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \cdots, P(X_n = 9)$, puis leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Après chaque DS, les étudiants fêtent la fin de la semaine dans l'un des (trois) bars de Saint-Cloud, numérotés par commodité 1, 2 et 3. Le choix du bar est aléatoire et se décide en fonction du protocole suivant :

- La première semaine, chaque bar a la même probabilité d'être choisie.
- Le bar 1 étant le meilleur mais le plus cher, les étudiants ne vont jamais deux fois de suite dans le même bar.
- Si le bar 1 a été choisi une semaine, les bars 2 et 3 seront choisis avec autant de chance la semaine suivante.
- Si le bar 2 ou 3 est choisi une certaine semaine, il y a une chance sur 2 pour changer de bar la semaine suivante et dans ce cas, autant de chance de choisir l'un des deux autres.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro du bar choisi lors de la n-ième semaine. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n la loi de la chaîne sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$V_n = \left(\mathbb{P}\left([X_n = 1]\right), \mathbb{P}\left([X_n = 2]\right), \mathbb{P}\left([X_n = 3]\right)\right).$$

1. **a.** Quelle est la loi de X_1 ? Préciser son espérance et sa variance.

b. Proposer une instruction Python permettant de simuler X_1.

2. Représenter le graphe et la matrice de transition associés à la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Justifier soigneusement, en citant les résultats utilisés que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$V_{n+1} = V_n A.$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_n = V_1 A^{n-1}$.

5. **a.** Vérifier que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$. On précisera la valeur propre associée.

b. Les commandes

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A = np.array([[0,1/2,1/2], [1/4,1/2,1/4], [1/4,1/4,1/2]])
B = A.transpose()
C= 16*al.matrix_power(B,2)-np.eye(3)
print(np.dot(C,B-np.eye(3)))
```

renvoient

```
>>>
[[0.,0.,0.],
[0.,0.,0.],
[0.,0.,0.]]
```

En déduire les autres valeurs propres possibles de ${}^tA$.

c. Vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien des valeurs propres de ${}^tA$, puis exhiber, en rédigeant soigneusement, une matrice diagonale D (dont les éléments diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant) et une matrice P inversible telles que

$${}^tA = PDP^{-1}.$$

d. Inverser P.

e. Calculer explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $\left({}^tA\right)^n$ puis A^n et en déduire la loi de X_n.

6. En utilisant la définition de la convergence d'une chaîne de Markov qui a été donnée en cours, conclure que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable Z que l'on explicitera. Établir un lien avec le vecteur V

Exercice 3

On considère la matrice M définie par

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** La matrice M est-elle inversible ?

b. Montrer que M admet trois valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ que l'on précisera. Expliciter trois vecteurs U_1, U_2 et U_3 tels que, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $E_{\lambda_i}(M) = \mathrm{Vect}(U_i)$.

c. Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

d. Déterminer les coordonnées (α, β, γ) de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base (U_1, U_2, U_3).

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (resp. rouge) lors du i-ième tirage.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n-ième tirage et on pose $X_0 = 2$. On admet que X_n est une chaîne de Markov à 3 états (notés 0, 1 et 2) et on note V_n la loi de X_n sous forme de vecteur de $\mathbb{R}^3$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la deuxième boule blanche.

2. **a.** Représenter le graphe probabiliste auquel la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est associée et préciser la matrice de transition. Exprimer A en fonction de M.

b. Justifier rigoureusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = V_n A$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$V_n = \alpha {}^tU_1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n {}^tU_2 + \gamma \left(\frac{1}{3}\right)^n {}^tU_3,$$

où α, β et γ sont les trois réels trouvés à la question **1.d**.

d. Donner la loi de la variable X_n.

3. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Reconnaître la loi de T_1.

5. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 2])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 3])$.

6. **a.** Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

b. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$\mathbb{P}([T_2 = n]) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\right].$$

c. Montrer que la variable T_2 admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(T_2)$.

Exercice 4

Dans tout l'exercice N désigne un entier naturel fixé n supérieur ou égal à 2, et p un réel fixé de l'intervalle $]0,1[$. On note $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel quelconque.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus.

Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés et qui sont contagieux.

Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- Chaque jour n chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p. Ces contaminations éventuelles sont indépendantes les unes des autres.
- Un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n+1$.
- Chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n+1$.

On note alors X_n le nombre d'individus (aléatoire) contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors $X_{i+1} = 0$ aussi.

Partie I : étude d'un cas particulier.

Dans cette partie, on traite le cas $N = 3$ et $p = \frac{1}{3}$. On considère les matrices S et N suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.

2. **a.** Montrer que les réels $-1, 0, 5$ et 9 sont des valeurs propres de S.

b. Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de la matrice S^n.

3. Soit n un entier positif fixé.

a. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 0]$.

b. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 3]$.

c. Vérifier que la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 1]$ (resp. $[X_n = 2]$) est une loi binomiale de paramètres $(2, \frac{1}{3})$ (resp. $(1, \frac{5}{9})$).

d. Représenter le graphe de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les états sont 0,1,2 et 3.

e. On introduit l'*espérance conditionnelle* notée $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n = i)$ qui correspond à l'espérance de la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = i]$.
Déterminer les valeurs respectives de $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n = 1)$ et $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n = 2)$.

4. On suppose **uniquement dans cette question** que X_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{3})$.

a. Déterminer la loi de X_1 et calculer $\mathbb{E}(X_1)$.

b. Vérifier la formule suivante :

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{E}(X_1|X_0 = i)\mathbb{P}([X_0 = i]).$$

5. On introduit le vecteur ligne U_n, correspondant au n-ième état probabiliste de la chaîne, c'est-à-dire,

$$U_n = (u_n, v_n, w_n, t_n) = (\mathbb{P}([X_n = 0]), \mathbb{P}([X_n = 1]), \mathbb{P}([X_n = 2]), \mathbb{P}([X_n = 3])).$$

a. Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n.

b. Déterminer une matrice M indépendante de n telle que

$$U_{n+1} = U_n M.$$

c. Exprimer M en fonction de S.

d. Quel est l'état stable de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

e. Donner l'expression des réels u_n et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.

6. On pose

$$F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0] .$$

a. Que représente l'événement F ?

b. Montrer la convergence de la chaîne de Markov vers l'état stable, peu importe la loi suivie par X_0. Interpréter.

Partie II : Le cas général.

Voir la suite du sujet (HEC 2008) à l'adresse https://louismerlin.fr/FTP/HEC08.pdf